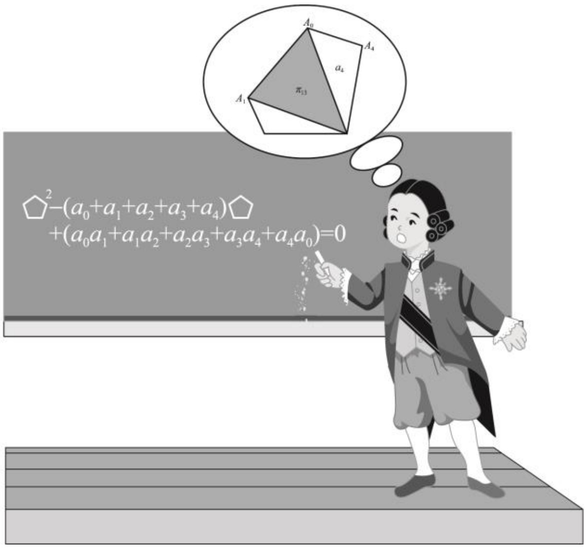
50 高斯戲弄五邊形…稀少，但成熟的數學風格

提到高斯，大家總是聯想到

$$1+2+3+\cdots+100=5050$$

的故事；有時也會提到高斯是第一位證明正十七邊形可以尺規作圖的數學家；或者說高斯的數學風格是稀少，但成熟。這裡我們要引導讀者完成一則五邊形的面積公式，知道這個公式的人不多，曉得公式是高斯所發現的更少。

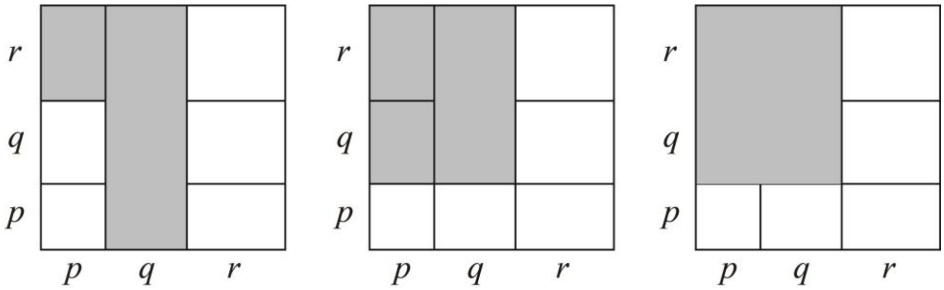


一般而言，從解題者的草稿紙或論證呈現次序總是可以一窺解題者的思考脈絡，就像從建築物的鷹架可以理解這建築物的搭建先後次序一樣。但是高斯卻是異數，他在完成數學作品後總是將思考痕跡擦得一乾二淨，將鷹架徹底移除。他的數學作品總是成熟，完美，讓人讚嘆，卻又看不出任何思考線索。

現在就讓我們來嘗試重建「高斯五邊形面積公式」的鷹架：俗語說得好「凡事起頭難」，但我們的起頭卻相當容易，只是大家想不到而已。你會認為

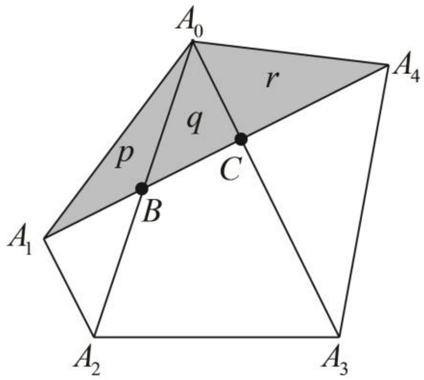
$$pr+q(p+q+r)=(p+q)(q+r)$$

是個很難的等式嗎？一點都不難，只需將兩邊分別乘開，就馬上看出相等了。雖然在中學教科書未曾出現過這個等式，但它卻是一個相當有用的公式，有人稱它為蒙日等式。我們也可以透過底下的面積演變，證明蒙日等式：



我們也可以用文字來記憶蒙日等式：「將一個數拆成三項的和，頭尾兩項的積加上中項與全數的積會等於前兩項和與後兩項和的乘積。」

既然要討論五邊形，就讓我們畫個隨意的凸五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$。為了方便起見，令三角形 A_0A_1B 的面積為 p，A_0BC 的面積為 q，A_0CA_4 的面積為 r；令線段 $\overline{A_0A_2}$ 是線段 $\overline{A_0B}$ 的 m 倍，$\overline{A_0A_3}$ 是 $\overline{A_0C}$ 的 n 倍；並將三角形 $A_0A_1A_2, A_0A_2A_3, A_0A_3A_4, A_0A_1A_4, A_0A_1A_3, A_0A_2A_4$ 的面積分別記為 $\pi_{12},\pi_{23},\pi_{34},\pi_{14},\pi_{13},\pi_{24}$：



有了五邊形圖形及符號定義之後，我們可以得出底下的面積關係：

$$\begin{cases} p=\dfrac{\pi_{12}}{m}, & q=\dfrac{\pi_{23}}{mn}, \quad r=\dfrac{\pi_{34}}{n}; \\ p+q+r=\pi_{14}, & p+q=\dfrac{\pi_{13}}{n}, \quad q+r=\dfrac{\pi_{24}}{m}. \end{cases}$$

把這六個式子代入蒙日等式，得

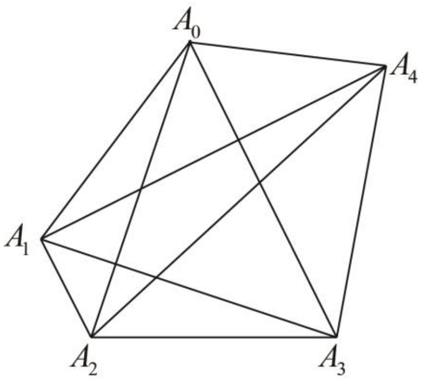
$$\frac{\pi_{12}\pi_{34}}{mn}+\frac{\pi_{23}\pi_{14}}{mn}=\frac{\pi_{13}\pi_{24}}{mn},$$

即

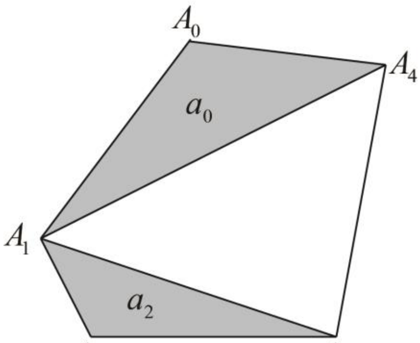
$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{23}\pi_{14}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

真想不到，從五邊形的一個頂點出發，總共可以畫出六個三角形，而他們的面積有這樣

美好的等式關係。我嘗試將五邊形的所有對角線都畫上，如下圖所示，此時對角線將五邊形分割成 11 塊區域：



把這11塊區域分別用符號標示,並把公式中的六個區域分別寫成這11塊區域的部分和，然後代入等式驗算，發現沒辦法完全消掉。這告訴我們，這個恆等式隱含著比 11 塊區域還多的訊息。現在就讓讀者操作一下剩下的部分。同樣是這個五邊形，我們把相鄰三個頂點 A_1, A_0, A_4 所形成的三角形 $\Delta A_1A_0A_4$ 之面積記為 a_0 ，同樣的，三角形 $\Delta A_2A_1A_0$, $\Delta A_3A_2A_1$, $\Delta A_4A_3A_2$ 及 $\Delta A_0A_4A_3$ 的面積分別記為 a_1, a_2, a_3 及 a_4，剛好每個頂點對應一個三角形，我麼稱它們為此五邊形的基本三角形。



設五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積為 ⬠*，試著利用基本三角形的面積 a_0, a_1, a_2, a_3 及 a_4 來表示五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積* ⬠。

我們手上已經有一個面積恆等式

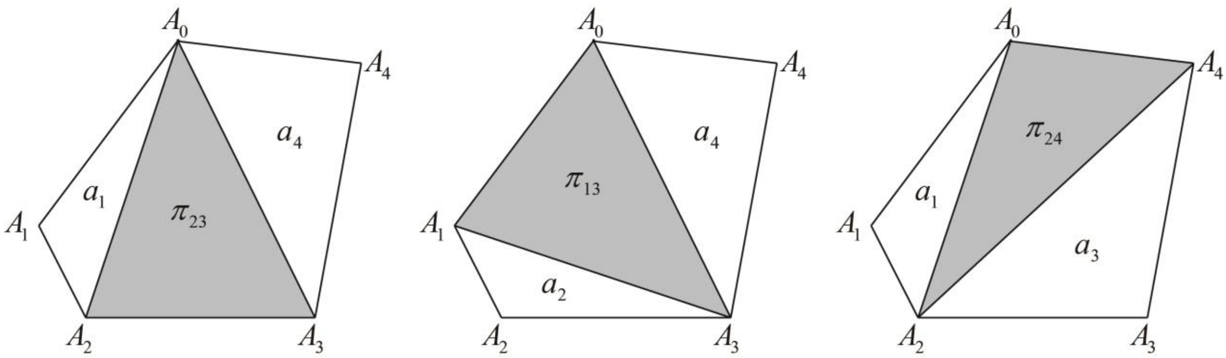
$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{23}\pi_{14}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

如果可以將恆等式中的六個值都用a_0,a_1,a_2,a_3,a_4及⬠來表示，那麼就可以求得⬠的公式了。

在走得更遠的路之前，讓我們停下來講個故事。幾年前中部一所大學舉辦一場研習，請了幾位數學教授演講有趣的數學題材，我就是講高斯五邊形定理這個主題，在演講結束後，參與研習的聽眾都對這個第一次聽到的公式很有興趣，然而午餐時間，主辦這場研習的教授問我一個問題：「知道這個五邊形的面積公式，對人類有什麼意義嗎？」我一時不知如何回答他的問題。現在想想，如果把對人類不是太有意義的事情，如音樂、藝術、登入月球、探測火星、宇宙有多大…等，都擱置或者不鼓勵研究，那麼我們的生活或世界會是個什麼模樣呢？

因為π_{12}是三角形$A_0A_1A_2$的面積，所以$\pi_{12}=a_1$；同理$\pi_{34}=a_4,\pi_{14}=a_0$。又從下面三個圖知道

$$\pi_{23}=\text{⬠}-(a_1+a_4);$$
$$\pi_{13}=\text{⬠}-(a_2+a_4);$$
$$\pi_{24}=\text{⬠}-(a_1+a_3).$$



將這些式子代入

$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{23}\pi_{14}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

得到

$$a_1a_4+(\text{⬠}-(a_1+a_4))a_0=(\text{⬠}-(a_2+a_4))(\text{⬠}-(a_1+a_3)).$$

整理移項得

$$\pentagon^2-(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4)\pentagon+(a_0a_1+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_0)=0.$$

也就是說，五邊形$A_0A_1A_2A_3A_4$的面積$\pentagon$是二次方程式

$$x^2-(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4)x+(a_0a_1+a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_0)=0$$

的一根，將二次方程式的根之公式解出，就得到$\pentagon$的公式。